Untersuchung des Systemes der Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren.

INAUGURAL-DISSERTATION,

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Eduard Geis
aus Helmarshausen.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei. (R. Friedrich).
1882.

Wenn

$$C \equiv A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, und

$$G \equiv (x - x_1) + l (y - y_1) = 0 \ldots\ldots (2)$$

die einer Geraden ist, so stellt die Gleichung

$$S \equiv C - \lambda G^2 = 0 \ldots\ldots (3\alpha)$$

einen Kegelschnitt dar, welcher den Kegelschnitt $C = 0$ in den Schnittpunkten der Geraden $G = 0$ doppelt berührt.

Die benutzte Gl. der Geraden lässt sofort erkennen, dass dieselbe für constantes x_1, y_1 durch einen festen Punkt P geht, die Grösse l bedeutet darin die trig. Tangente des Winkels, welchen die Gerade $G = 0$ mit der negativen Richtung der Y Axe einschliesst.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe diese Gleichung (3α) zu discutiren unter der Voraussetzung eines constanten λ.

Lösen wir zu diesem Zwecke Gl. (3α) auf und geben ihr die Form

$$3\alpha) \ldots S \equiv \left\{ \begin{array}{l} (A-\lambda)x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(D+\lambda x_1)x + 2Ey + (F-\lambda x_1^2) \\ \qquad - \lambda l (y - y_1)\left[2(x - x_1) + l(y - y_1)\right] \end{array} \right\} = 0$$

so stellt sich dieselbe wenn wir:

$$\left. \begin{array}{l} K \equiv (A-\lambda)x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(D+\lambda x_1)x + 2Ey + (F-\lambda x_1^2) \\ A \equiv y - y_1 \\ L \equiv 2(x - x_1) + l(y - y_1) \\ k \equiv \lambda l \end{array} \right\} \ldots$$

setzen unter der Form

$$S \equiv K - k A L = 0 \ldots\ldots (3\beta)$$

dar, und es folgt, dass unser Kegelschnitt durch die 4 den durch $A=0$ und $L=0$ repräsentirten Geraden mit dem durch $K=0$ dargestellten Kegelschnitt gemeinsamen Punkte geht. Von diesen Punkten sind, da ausser in k nur in dem Ausdruck L die die Veränderung der Geraden $G=0$ bedingende variabele Grösse l enthalten ist, die beiden zwischen $A=0$ und $K=0$ gemeinsamen Punkte fest, und wir können mithin folgenden Satz aussprechen:

»Alle Kegelschnitte, welche einen gegebenen doppelt berühren, und deren Berührungssehne durch einen gegebenen Punkt geht, gehen für gegebenes λ durch zwei feste Punkte, welche mit dem gegebenen auf einer zur X-Axe parallelen Geraden liegen.«

Ehe wir nun die Coordinaten dieser zwei festen Punkte aus den gegebenen Gleichungen berechnen, möge noch die Umkehrung des vorstehenden Satzes nachgewiesen werden.

Wenn wir in der Gl.

$$S \equiv C - \lambda G^2 \equiv C - \lambda\left[(x-x_1)+l(y-y_1)\right]^2 = 0:$$

Die Coord.: x_1 u. y_1 als variabel annehmen, dagegen bestimmen, dass die durch $S=0$ dargestellten Kegelschnitt durch zwei feste Punkte $P_1\,(X_1, Y_1)$ und $P_2\,(X_2, Y_2)$ gehen sollen, so bekommen wir aus obiger Gleichung durch Einsetzen der Coord. dieser Punkte zwei Gleichungen, welche $\equiv 0$ sind:

$$C_1 - \lambda\left[(X_1-x_1)+l(Y_1-y_1)\right]^2 \equiv 0$$

$$C_2 - \lambda\left[(X_2-x_1)+l(Y_2-y_1)\right]^2 \equiv 0$$

wenn wir die hierdurch erfolgten Wertänderungen der Grösse C mit C_1 u. C_2 bezeichnen, welche jetzt völlig bestimmte Werte besitzen.

Wird nun λ aus diesen Gleichungen eliminirt, so folgt

$$C_1\left[(X_2-x_1)+l(Y_2-y_1)\right]^2 \equiv C_2\left[(X_1-x_1)+l(Y_1-y_1)\right]^2$$

oder wenn $\sqrt{C_1}=a_1$ u. $\sqrt{C_2}=a_2$ gesetzt wird nach Ausziehen der Quardatwurzel

$$\Big[a_1(X_2-x_1)-a_2(X_1-x_1)\Big]+l\Big[a_1(Y_2-y_1)-a_2(Y_1-y_1)\Big]\equiv 0$$

Aus der letzten Gl. geht aber, da die Grösse l eine Variabele ist, sofort hervor

$$a_1(X_2-x_1)-a_2(X_1-x_1)=0$$
$$a_1(Y_2-y_1)-a_2(Y_1-y_1)=0$$

woraus die Coordinaten x_1 u. y_1 als völlig bestimmte sich ergeben, es folgt somit als Umkehrung unseres eben gefundenen Satzes:

»Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht und mit einem festen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, so geht die Berührungssehne desselben mit diesem letzteren stets durch einen festen Punkt.«

Wir bestimmen nunmehr die Abscissen dieser beiden Punkte, welche wir P_1 u. P_2, nennen wollen und setzen hierzu y_1 statt y in die Gl. $K=0$ ein, woraus wir folgende Werte finden:

$$(5)\ldots\quad \left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \mp \frac{\sqrt{\lambda(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F) +(B^2-AC)y_1^2+2(BD-AE)y_1+(D^2-AF)}}{A-\lambda} - \frac{By_1+D+\lambda x_1}{A-\lambda}$$

aus welchen wir erkennen, dass diese Punkte reell und zwar getrennt oder zusammenfallend sind, je nachdem die Bedingung

$$(6)\ldots\quad \left.\begin{matrix} \lambda(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F) \\ +(B^2-AC)y_1^2+2(BD-AE)y_1+D^2-AF) \end{matrix}\right\} \geqq 0$$

besteht.

Liegt nun Punkt P auf dem geg. Kegelschnitt, so berühren sich die Kegelschnitte $S=0$ sämmtlich in diesem Punkte P und es ist

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F\equiv 0$$

also die Bedingung der Realität der Punkte P_1 u. P_2 von der Grösse λ unabhängig, dieselbe ist in diesem Falle gegeben durch:

$$(B^2-AC)y_1^2+2(BD-AE)y_1+D^2-AF\geqq 0\ldots\ldots(6\alpha)$$

Setzen wir den Wert dieses Ausdrucks $= w$ (sodass also die Grösse w einen jeden beliebigen positiven Wert zwischen 0 u. $+\infty$ annehmen kann) und lösen die dadurch entstehende nach y_1 quadratische Gleichung auf, so ergeben sich die Wurzeln

$$y_1 = \pm \frac{\sqrt{-w(AC-B^2)+(D^2-AF)(AC-B^2)+(BD-AE)^2}}{AC-B^2} + \frac{BD-AE}{AC-B^2} \quad \text{(a)}$$

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck muss nun $\geqq 0$ sein, da y_1 die Ordinate eines reellen Punktes ist, mithin folgt

$$w \leqq \frac{(BD-AE)^2}{AC-B^2} + D^2 - AF \quad \text{(b)}$$

und wir erkennen, dass für den angenommenen speciellen Fall, dass nämlich der feste Punkt auf dem geg. Kegelschnitt liege, die Grösse w, oder was dasselbe heisst der Ausdruck

$$-(AC-B^2)y_1^2 + 2(BD-AE)y_1 + D^2 - AF$$

zwischen den Grenzen 0 und

$\frac{(BD-AE)^2}{AC-B^2} + D^2 - AF$ liegen muss, und dass ferner dieser letzte Ausdruck positiv sein muss, wenn die beiden Punkte P_1 u. P_2 reelle Punkte sein sollen.

Ist nun die Lage des auf dem geg. Kegelschnitte befindlichen Punktes P eine bestimmte, so kann aus seiner Ordinate mit Hilfe der Gl. (6a) die ihm zukommende Grösse w gefunden und durch Gl. (b) geprüft werden, ob die Punkte P_1 u. P_2 reell sind.

Legt man umgekehrt der Grösse w einen constanten Wert bei und sieht die Lage des Punkes P als unbestimmt an, so muss derselbe zu Folge der Gl. (a) auf einer durch dieselbe dargestellten und zur X-Axe parallelen Geraden liegen, mithin kann derselbe, da er auch auf dem geg. Kegelschnitt liegen muss, nur in den vier Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit den durch Gl. (a) dargestellten zwei Geraden liegen. Ändert

sich nun der Wert w, so ändern sich auch die Lagen der für P möglichen Punkte resp. die der gedachten Geraden; für den Grenzwerth $w=0$ geht die Gl. der letzteren über, in

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{(D^2-AF)(AC-B^2)+(BD-AE)^2}}{AC-B^2}+\frac{BD-AE}{AC-B^2} \quad (c)$$

dagegen für den zweiten Grenzwert

$$w=\frac{(BD-AE)^2}{AC-B^2}+D^2-AF$$

wird dieselbe eine einzige Gerade

$$y_1=\frac{BD-AE}{AC-B^2} \quad (d)$$

welche durch den Mittelpunkt des geg. Kegelschnittes parallel zur X-Axe geht.

Diese letzte Grenzlinie darf nun von beiden Seiten her vom Punkt P erreicht werden, sie ist daher als Grenzlinie illusorisch und sind nur die durch Gl. (c) dargestellten als solche zu betrachten, ausserhalb deren der feste Punkt P nicht liegen darf.

Da die Ordinate dieser beiden Geraden stets

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{(D^2-AF)(AC-B^2)+(BD-AE)^2}}{AC-B^2}+\frac{BD-AE}{AC-B^2}$$

und $\frac{BD-AE}{AC-B^2}$ die des Mittelpunktes des gegebenen Kegelschnittes, so liegen die beiden oben besprochenen Grenzlinien für den Punkt P gleichweit von diesem Mittelpunkte entfernt und zwar die eine nach der positiven, die andern nach der negativen Richtung der X-Axe hin, weil dieselben bei Transformation auf diesen Mittelpunkt die Gleichungen

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{(D^2-AF)(AC-B^2)+(BD-AE)^2}}{AC-B^2}$$

erhalten.

Die vorstehenden Betrachtungen sind sowol für die Ellipse als die Hyperbel gültig, ist jedoch der geg. Kegelschnitt eine Parabel, so ist seine Diskriminante $AC^2-B^2=0$ und die durch Gl. (6 α) aufgestellte Bedingung geht hierfür über in

$$2(BD-AE)y_1+D^2-AF\geqq 0$$

woraus

$$y_1\geqq\frac{AF-D^2}{2(BD-AE)}$$

sich ergibt, mithin muss der feste Punkt P rechts von der zur X-Axe parallelen Geraden

$$y_1=\frac{AF-D^2}{2(BD-AE)}$$

liegen, wenn derselbe ein Punkt der gegebenen Parabel sein soll für den Fall, dass die Punkte P_1 u. P_2 reell sind.

Sollen die Punkte P_1 u. P_2 zusammenfallen, also die Schaar der Kegelschnitte $S=0$ sich in ihnen berühren, so kann der Punkt P nur auf den Schnittpunkten der Grenzlinien mit dem gegebenen Kegelschnitt liegen, also für die Ellipse und Hyperbel je 4, für die Parabel aber nur zwei verschiedene Lagen haben.

Aus Gl. (5) erkennen wir, dass

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F)\\+(B^2-AC)y_1^2+2(BD-AE)y_1+D^2-AF\end{array}\right\}=0$$

sein muss, wenn überhaupt die beiden Punkte P_1 u. P_2 ineinanderfallen, also alle für constanstes λ sich ergebenden Kegelschnitte $S=0$ sich in einem Punkte berühren sollen.

Ordnen wir diese Gl. nach x_1 u. y_1

$$\Pi\equiv\left.\begin{array}{l}x_1^2A\lambda+2B\lambda x_1y_1+y_1^2(C\lambda+B^2-AC)\\+2D\lambda x_1+2(E\lambda+BD-AE)y_1+\lambda F+D^2-AF\end{array}\right\}=0$$

so stellt sie, wenn wir x_1 u. y_1 als variabele Coordinaten ansehen, einen Kegelschnitt dar, auf welchem mithin jeder Punkt P liegen muss, für welchen die erwähnte Berührung der Kegelschnitte $S=0$ möglich ist. Seine Mittelpunktscoordinaten

$$\xi=\frac{BE-CD}{AC-B^2};\eta=\frac{BD-AE}{AC-E}$$

zeigen, dass derselbe mit dem gegebenen gleiches Centrum besitzt, welches auch der für λ angenommene Wert sei.

Die nach Gl. (5) hierfür übrig bleibende Abscisse des Berührungspunktes P_1

$$X_1 = -\frac{By_1 + D + \lambda x_1}{A - \lambda} \quad \ldots\ldots (5\alpha)$$

erfordert nun, wenn wir für die gedachte Berührung einen festen Punkt P_1 als Berührungspunkt annehmen, einen ganz bestimmten Durchschnittspunkt P der Berührungssehnen, dessen Ordinate, wie wir wissen $= y_1$, und dessen Abcisse aus der Gl. (5α) sich ergibt:

$$x_1 = -\frac{X_1(A - \lambda) + By_1 + D}{\lambda}$$

setzen wir nun diesen Wert für x_1 in obige Gl. Π; $= 0$ ein, so bekommen wir einen zweiten Kegelschnitt, zwischen den Coordinaten X_1 und Y_1 dieses Berührungspunktes (da $Y_1 = y_1$)

$$\Pi_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} X^2 A(A - \lambda) + 2B(A - \lambda) XY + Y^2(B^2 - C\lambda) \\ \quad + 2D(A - \lambda) X - 2(BD - E\lambda) Y + D^2 - F \end{array} \right\} = 0$$

dessen Mittelpunktscoordinaten die nämlichen sind wie die von $\Pi = 0$ resp. $C = 0$

$$\xi = \frac{BE - CD}{AC - B^2} : \eta = \frac{BD - AE}{AC - B^2}.$$

Es folgt mithin der Satz:

»Die einen geg. Kegelschnitt für constantes λ doppelt berührenden Kegelschnitte berühren sich in einem Punkt, wenn der gemeinsame Durchschnittspunkt ihrer Berührungssehnen auf einem gewissen Kegelschnitt liegt. Ihr Berührungspunkt beschreibt dann, sobald der erwähnte Durchschnittspunkt diesen Kegelschnitt durchläuft, ebenfalls einen Kegelschnitt, und es fallen die Centra beider Kegelschnitte mit dem des gegebenen zusammen.«

Von Interesse ist es auch den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller der Kegelschnitte $S = 0$ denen ein und derselbe Wert λ zukommt näher zu bestimmen. Um eine Gleichung für

denselben aufzustellen, lösen wir Gl. (3α) völlig nach x und y auf und suchen die Coordinaten ihres Mittelpunktes:

$$\xi = \frac{BE + B\lambda l x_1 + B\lambda l^2 y_1 - E\lambda l - CD - C\lambda x_1 - C\lambda l y_1 + D\lambda l^2}{AC - A\lambda l^2 - C\lambda - B^2 + 2B\lambda l} \ldots (7)$$

$$\eta = \frac{BD + B\lambda x_1 + B\lambda l y_1 - D\lambda l - AE - A\lambda l x_1 - A\lambda l^2 y_1 + E\lambda}{AC - A\lambda l^2 - C\lambda - B^2 + 2B\lambda l} \ldots (8)$$

aus welchen nach Elimination von l die gewünschte Gleichung der Mittelpunktscurve zwischen den Variabelen ξ und η sich ergibt.

Die Elimination lässt sich leicht ausführen, wenn wir obige Gleichungen nach l ordnen:

$$\left.\begin{aligned} l^2\Big[By_1 + D + A\xi\Big]\lambda + l\Big[Bx_1 - Cy_1 - E - 2B\xi\Big]\lambda \\ + \Big[BE - CD - C\lambda x_1 - (AC - B^2 - C\lambda)\xi\Big] \end{aligned}\right\} = 0 \ldots (7\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} l^2 A\Big[y_1 - \eta\Big] + l\Big[Ax_1 - By_1 + D + 2B\eta\Big]\lambda \\ + \Big[AE - E\lambda - BD - B\lambda x_1 + (AC - B^2 - C\lambda)\eta\Big] \end{aligned}\right\} = 0 \ldots (8\alpha)$$

und dann die Resultante der Gleichungen in Determinantenform bilden

Nachdem wir noch die abkürzenden Bezeichnungen

$$(9) \ldots \begin{array}{llll} \alpha = By_1 + D & , & \delta = AC - B^2 - C\lambda \\ \beta = Bx_1 - Cy_1 - E & , & \varepsilon = Ax_1 - By_1 + D \\ \gamma = BE - CD - C\lambda x_1 , & & \mu = AE - E\lambda - BD - B\lambda x_1 \end{array}$$

in dieselben eingesetzt haben, ergibt sich folgende Eliminations-Determinante

$$M \equiv \begin{vmatrix} (\alpha + A\xi)\lambda , & 0 & , A(y_1 - \eta)\lambda , & 0 \\ (\beta - 2B\xi)\lambda , & (\alpha + A\xi)\lambda , & (\varepsilon + 2B\eta)\lambda , & A(y_1 - \eta)\lambda \\ \gamma - \delta\xi & , (\beta - 2B\xi)\lambda , & \mu + \delta\eta & , (\varepsilon + 2B\eta)\lambda \\ 0 & , \gamma - \delta\xi & , 0 & , \mu + \delta\eta \end{vmatrix} = 0$$

Diese für den geom. Ort der Mittelpunkte sich ergebende Gleichung erscheint zunächst vom 4. Grad nach ξ und η; sie

kann jedoch in eine solche zweiten Grades umgewandelt werden, was wir ausführen wollen.

Multipliciren wir die zweite Reihe mit A und addiren zu ihren Gliedern die entsprechenden mit $2B$ multiplicirten der ersten Reihe, verfahren ebenso mit der dritten resp. vierten Reihe, indem wir ihre Glieder mit δ resp. $-2B\lambda$ multipliciren, so nimmt die Determinante folgende Form an; wenn wir noch in der ersten und zweiten Reihe durch λ dividiren:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha + A\xi & 0 & A(y_1 - \eta) & 0 \\ A\beta + 2B\alpha, & A(\alpha + A\xi), & A\varepsilon + 2ABy_1, & A^2(y_1 - \eta) \\ \delta(\gamma - \delta\xi), & \delta\beta - 2B\lambda\gamma, & \delta(\mu + \delta\eta) & \delta\varepsilon - 2B\lambda\mu \\ 0 & \gamma - \delta\xi & 0 & \mu + \delta\eta \end{vmatrix} = 0$$

Wenden wir nun dieses nämliche Verfahren nochmals auf die erste und dritte, zweite und vierte Reihe an mit den Factoren δ^2 und A, δ und A^2, so resultirt die Determinante:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha + A\xi & 0 & A(y_1 - \eta) & 0 \\ A\beta + 2B\alpha, & A(\alpha + A\xi), & A\varepsilon + 2ABy_1, & A^2(y_1 - \eta) \\ A\gamma\delta + \alpha\delta^2, & A\delta\beta - 2B\lambda\gamma, & A\delta\mu + Ay_1\delta^2, & A\delta\varepsilon - B\lambda\mu \\ \delta(A\beta + B\alpha), & A\alpha\delta + A^2\gamma, & \delta(A\varepsilon + 2ABy_1), & A^2y_1\delta + A^2\mu \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

welche quadratisch nach ξ und η ist, sodass wir demnach folgendes Resultat haben:

»Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt in der Weise doppelt berühren, dass die Berührungssehnen sich in einem Punkte schneiden, ist ein Kegelschnitt«.

Bevor wir zur Betrachtung der speciellen Kegelschnitte übergehen, wollen wir noch den Kegelschnitt $K = 0$ etwas näher ins Auge fassen.

Geben wir seiner Gleichung die Form

$$K \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F - \lambda(x - x_1)^2 = 0$$

so stimmt sie mit der Gleichung $S = 0$ überein, wenn in dieser die Grösse $l = 0$ gesetzt wird. Unser Kegelschnitt berührt

daher den gegebenen in den mit der zur Y-Axe parallelen Geraden ($x=x_1$) gemeinsamen Punkten und ist zu Folge seiner Discriminante

$$\delta = AC - B^2 - \lambda C$$

eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem

$$\lambda \gtreqless \frac{AC - B^2}{C}$$

Ist nun das Coordinatensystem den Hauptaxen des Kegelschnittes $C=0$ parallel, so wird $B=0$ und es vereinfacht sich diese Bedingung in:

$$(11) \ldots \quad \lambda \gtreqless A$$

Der Umstand, dass dieser Kegelschnitt nur in Bezug auf ein System der gedachten Art in einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel übergehen kann, veranlasst uns die jetzt folgende Betrachtung der einzelnen Kegelschnitte nur bei zu Grundelegung eines derartigen Systems durchzuführen, da auch ausserdem die hierbei oft auftretenden Ausdrücke für die Abscissen der Punkte P_1 und P_2, sowie diejenigen für die Coordinaten des Mittelpunktes eines doppelt berührenden Kegelschnittes wesentlich einfacher werden, und die Kegelschnitte $\Pi = 0$ und $\Pi_1 = 0$ eine bequemere Form erhalten.

In Folge dessen, dass die Bedeutung der Grösse »λ« wesentlich von der Form des zu Grunde gelegten Coordinatensystemes abhängt, kann es nicht befremden, dass in folgender Untersuchung nur solche Punkte P_1 und P_2 auftreten, welche auf einer zur Abscissenaxe parallelen Geraden liegen.

Zunächst ist nun die vorstehende allgemeine Betrachtung auf die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und der Hyperbel bezogen mit vollständiger Diskussion aller sich dabei ergebenden Verhältnisse. Sodann sind die bereits gefundenen Haupt-Resultate an der allgemeinen Scheitelgleichung, sowie der Scheitelgleichung der Ellipse hergeleitet, um hieran eine nähere Betrachtung der Parabel anzuschliessen.

I.

Nehmen wir die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in der Form

$$E \equiv x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 = 0$$

an, so wird die Gleichung eines doppelt berührenden Kegelschnittes.

$$(12) \ldots S \equiv \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda) x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + 2\lambda x_1 x - a^2 - \lambda x_1^2 \\ \quad - \lambda l (y - y_1) \left[2 (x - x_1) + l (y - y_1) \right] \end{array} \right\} = 0$$

und es ändert sich bei Anwendung der oben unter (4) benutzten Bezeichnungen nur der Wert von K

$$K \equiv (1-\lambda) x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + 2\lambda x_1 x - a^2 - \lambda x_1^2$$

während die Grössen A, L, k dieselben Ausdrücke darstellen.

Geben wir wieder λ einen constanten Wert und berechnen die Coordinaten der beiden herauf bezüglichen Punkte P_1 u. P_2

$$(13) \ldots \left. \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} = \frac{\pm \sqrt{(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2) + \lambda (x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - a^2)}}{1-\lambda} - \frac{\lambda x_1}{1-\lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 \\ Y_2 \end{array} \right\} = y_1$$

so erkennen wir, dass die Schaar der für dieses λ sich ergebenden doppelt berührenden Kegelschnitte durch zwei reelle Punkte geht, wenn

$$(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2) + \lambda (x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - a^2) \geqq 0 \quad \ldots (14)$$

Liegt nun der Punkt P auf der gegebenen Ellipse, so wird das zweite Glied dieses Ausdruckes $= 0$ und die Realität der Punkte P_1 und P_2 ist mithin unabhängig von dem Wert der Grösse λ und ist stets vorhanden, da für jede Lage des

Punktes P auf der gegebenen Ellipse $y_1^2 \leqq b^2$ mithin $b^2 - y_1^2 \geqq 0$, oder was dasselbe heisst:

$$a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2 \geqq 0.$$

Dies stimmt auch mit der für die allgemeine Gleichung durchgeführten Betrachtung der Grenzlinien überein, dieselben werden in diesem Falle dargestellt durch die Gleichung

$$y_1 = \pm b$$

und ist demnach nur eine Berührung der Kegelschnitte $S = 0$ in dem Doppelpunkte P_1 und P_2 möglich, wenn der auf der gegebenen Ellipse befindliche Punkt P in den Scheiteln der Y-Axe liegt.

Zu jeder anderen Lage des Punktes P ist für die Berührung der Kegelschnitte $S = 0$ die Bedingung.

$$\left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_1^2 + \lambda(x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - a^2) = 0$$

erforderlich, welche Gleichung nach x_1 und y_1 geordnet als den bei dieser Annahme erforderlichen Ort des Punktes P den Kegelschnitt

$$\Pi \equiv \frac{x_1^2}{\left(\frac{a\sqrt{\lambda - 1}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$$

liefert. Durchläuft nun der Punkt P diesen Kegelschnitt, so beschreibt der Berührungspunkt P_1 der Kegelschnitte $S = 0$ den Kegelschnitt

$$\Pi_1 \equiv \frac{X^2}{\left(\frac{a\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda - 1}}\right)^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

wie wir aus der Abscisse

$x_2 = -\frac{\lambda x_1}{1 - \lambda}$ und der Gleichung $\Pi = 0$ durch Elimination von λ finden.

Diese Kegelschnitte $\Pi = 0$ und $\Pi_1 = 0$ haben mit der geg. Ellipse gleiches Centrum und gleiche Hauptaxenrichtung ja sogar gleiche Länge der in der Y-Axe liegenden Hauptaxe, und sind für jeden ausserhalb der Grenzen 0 und $+1$ liegenden Wert von λ Ellipsen, für jeden zwischen denselben liegenden Wert imaginäre Curven.

Dass der Kegelschnitt $\Pi = 0$ die gegebene Ellipse in den in der Y-Axe liegenden Schnittpunkten berührt, stimmt mit dem obigen Ergebniss überein, wonach für eine Berührung der Kegelschnitte $S = 0$ untereinander und der Bedingung, dass der Punkt P auf der gegebenen Ellipse liegen soll, nur eben diese Scheitelpunkte ($y = \pm b$) möglich sind.

Die Mittelpunktscurve der für einen bestimmten Wert λ möglichen Kegelschnitte $S = 0$ kann ohne Schwierigkeit aus den Coordinaten des Mittelpunktes eines beliebigen derselben

$$\xi = \frac{-a^2\lambda(x_1 + l y_1)}{a^2 - \lambda a^2 - b^2\lambda l^2}; \quad \eta = \frac{-b^2\lambda l(x_1 + l y_1)}{a^2 - \lambda a^2 - b^2\lambda l^2}$$

gefunden werden, denn durch Division dieser Werte erhält man $l = \frac{a^2\eta}{b^2\xi}$, welcher Wert in eine der obigen Gleichungen eingeführt die Gleichung der Mittelpunktscurve:

$$M \equiv b^2(1-\lambda)\xi^2 - a^2\lambda\eta^2 + b^2 x_1\lambda\xi + a^2\lambda y_1\eta = 0$$

liefert. Dieselbe stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse geht und gleiche Richtung der Hauptaxen mit ihr hat, während er die Y-Axe für jeden Wert von λ in demselben durch $y = y_1$ repräsentirten Punkte schneidet. Seiner Gestalt nach ist derselbe für negatives λ eine Ellipse, für positives dagegen eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel je nachdem

$$\lambda \gtrless 1$$

die Centrums-Coordinaten von $M = 0$ sind

$$\xi_0 = \frac{x_1\lambda}{2(\lambda - 1)}; \quad \eta_0 = \frac{y_1}{2}$$

Wollen wir dagegen im umgekehrten Falle, dass nämlich der Wert l constant ist, während die Grösse λ veränderlich, den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller für diese Voraussetzung möglicher doppelt berührenden Kegelschnitte $S=0$ aufsuchen, so ergibt sich derselbe durch die eben schon ausgeführte Division der Mittelpunkts-Coordinaten eines beliebigen Kegelschnittes als die durch

$$\xi = \frac{a^2}{b_2 l}\eta$$

dargestellte Gerade, welche die Verbindungslinie des Mittelpunktes der gegebenen Ellipse mit dem Pol der nunmehr festen gemeinsamen Berührungssehne ist.

Da dies letztere jedoch von geringerer Wichtigkeit, so übergehen wir dasselbe und wollen noch den oben für constantes λ und variabeles l gefundenen Mittelpunktskegelschnitt für einige besonders ausgezeichnete Werte von λ betrachten.

$$1,\ \underline{\lambda = \infty}$$

Die Gleichung $M=0$ lässt sich jetzt durch λ dividiren und wird nach Transformation auf ihren Mittelpunkt $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ und ihre Hauptaxen

$$\frac{\xi'^2}{a^2 \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{4 a^2 b^2}} + \frac{\eta'^2}{b^2 \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{4 a^2 b^2}} - 1 = 0$$

Für diesen Wert von λ degenerirt die Schaar der doppelt berührenden Kegelschnitte in die Schaar der durch den festen Punkt P gehenden Sehnen und wir erhalten das schon bekannte Resultat.

»Die Mittelpunkte aller Sehnen einer Ellipse, welche durch einen festen Punkt gehen, liegen auf einer der gegebenen ähnlichen Ellipse, welche durch den Mittelpunkt jener geht und gleiche Richtung der Hauptaxen mit ihr hat, während ihr Mittelpunkt die durch den gegebenen festen Punkt und den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse begrenzte Gerade halbirt.

Der Quotient einer Halbaxe dieser Ellipse zu der ihr entsprechenden der gegebenen ist das Verhältnis des Radiusvectors des festen Punktes zu dem in ihr liegenden Durchmesser der gegebenen Ellipse.

Letzteres folgt daraus, dass die Länge dieses Radiusvectors

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

während die des in ihm liegenden Durchmessers

$$d = \frac{2\,a\,b\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{b^2\,x_1^2 + a^2\,y_1^2}}$$

Eine sehr einfache Form erhält für diesen Wert $\lambda = \infty$ der Kegelschnitt $K = 0$, er ist die durch den festen Punkt P gehende Parallele zur Y-Axe.

Die beiden Punkte P_1 und P_2 fallen mit P zusammen.

$$2,\ \underline{\lambda = 1}$$

macht die Mittelpunktscurve $M = 0$ zu einer Parabel

$$a^2\,\eta^2 - b^2\,x_1\,\xi - a^2\,y_1\,\eta = 0$$

deren Parameter $p = \frac{a^2}{b^2}\,x_1$

während die Scheitelcoord. $u = -\frac{a^2\,y_1^2}{4b^2 x_1}$; $v = \frac{y_1}{2}$

Der durch $K = 0$ dargestellte Kegelschnitt wird ebenfalls eine Parabel mit einem doppelt so langen Parameter

$$p = 2\frac{b^2}{a^2}\,x_1$$

welche sich nach der negativen Richtung der X-Axe hinerstreckt, während die erste die entgegengesetzte Richtung inne hat.

$$3,\ \lambda = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}$$

gibt der Mittelpunktscurve die Gestalt eines Kreises

$$M \equiv \xi^2 + \eta^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1\,\xi - y_1\,\eta = 0$$

wodurch die für die Realität der Punkte P_1 u. P_2 erforderliche Bedingung die Form

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\leqq 0$$

erhält, sodass also der Punkt P innerhalb der durch

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0$$

dargestellten Ellipse liegen muss, wenn die Punkte P_1 und P_2 verschiedene Lage haben sollen, dagegen auf dieser Ellipse, wenn P_1 und P_2 zusammenfallen, also die Kegelschnitte $S=0$ sich berühren.

Dieses nämliche Resultat erlangen wir durch Aufstellung der Gleichung $\Pi=0$, sie ist mit obiger Ellipse identisch, für die Gleichung $\Pi_1=0$ dagegen finden wir

$$\Pi_1\equiv\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$$

also einen Kreis mit dem Radius b, und wir können diese Erörterungen in folgendem Satz zusammenfassen.

»Alle Kegelschnitte, welche die gegebene Ellipse doppelt berühren, schneiden sich in zwei reellen Punkten und haben einen Kreis zum Ort ihrer Mittelpunkte, für welche die Grösse λ dem negativen Wert des Quadrates der durch die lineare Excentricität dividirten kleinen Halbaxe der gegebenen Ellipse gleich ist, und für welche der feste Punkt P innerhalb einer der gegebenen concentrischen Ellipse liegt, deren kleine Halbaxe der der gegebenen Ellipse gleich ist, während ihre grosse Halbaxe gleich dem Krümmungsradius der gegebenen Ellipse im Scheitel ihrer kleinen Axe ist. Liegt der Punkt P auf dieser Ellipse, so berühren sich sämmtliche oben genannten Kegelschnitte in ein und demselben Punkte, welcher auf der Peripherie des um den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse mit ihrer kleinen Halbaxe beschriebenen Kreises liegt«.

Wählen wir noch die Axen der gegebenen Ellipse so, dass $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, so wird $\lambda = -1$ und auch der Kegelschnitt $K = 0$ geht in einen Kreis

$$K \equiv x^2 + y^2 - x_1 x = \frac{a^2 - x_1^2}{2}$$

über, dessen Mittelpunkt in der X-Axe liegt.

Hierfür wird die Gleichung $\Pi = 0$

$$\Pi \equiv \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{2}} - 1 = 0$$

also eine Ellipse, deren kleine Halbaxe gleich dem vierten Teil ihrer grossen Halbaxe ist, während der Radius des Kreises $\Pi_1 = 0$ gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

An diese charakteristischen Werte knüpfen wir die Betrachtung einiger specieller doppelt berührenden Kegelschnitte an, um die Richtigkeit des aufgestellten Satzes zu prüfen.

A, Ist $x_1 = a$; $y_1 = 0$, so ist

$$M \equiv \xi^2 + \eta^2 - \frac{a}{2}\xi = 0$$

die Centrumscoordinaten $\alpha = \frac{a}{4}$; $\beta = 0$, der Radius $r = \frac{a}{4}$

$$K \equiv x^2 + y^2 - a x = 0$$

die Centrumscoordinaten $\alpha_1 = \frac{a}{2}$; $\beta_1 = 0$, der Radius $r_1 = \frac{a}{2}$

Construirt man nun einige doppelt berührende Kegelschnitte hierzu z. B.

für $l = 1$; $S \equiv 2x^2 + 2xy + 3y^2 - 2ax - 2ay = 0$

so sind seine Centrumscoordinaten $\xi = \frac{2}{5}a$; $\eta = \frac{a}{5}$ und dieselben machen $M \equiv 0$.

Die Schnittpunkte P_1 und P_2 haben, da $y_1 = 0$, zufolge der Gleichung $K = 0$ die Coordinaten

$$X_1 = 0;\ X_2 = 0$$
$$Y_1 = 0;\ Y_2 = 0,$$

welche Werte die Gleichung $S = 0$ befriedigen.

Dieselbe Uebereinstimmung finden wir für

$$l = 2;\ S \equiv 2x^2 + 4xy + 6y^2 - 2ax - 4ay = 0$$

wobei $\xi = \frac{a}{4};\ \eta = \frac{a}{4}$

$$B,\ x_1 = a;\ y_1 = \frac{a}{4}$$

Es wird

$$M \equiv \xi^2 + \eta^2 - \frac{a}{2}\xi - \frac{a}{4}\eta = 0 \begin{cases} \alpha = \frac{a}{4};\ \beta = \frac{a}{8} \\ r = \frac{a}{8}\sqrt{5} \end{cases}$$

$K \equiv x^2 + y^2 - ax = 0$ (ganz wie oben).

Für $l = 1$ ist

$$S \equiv 2x^2 + 2xy + 3y^2 - \frac{5}{2}ax - \frac{5}{2}ay + \frac{9}{16}a^2 = 0$$

$\xi = \frac{a}{2};\ \eta = \frac{a}{4}$ machen $M \equiv 0$.

Die Coordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 sind jetzt

$$P_1 \begin{cases} X_1 = \frac{a}{4}(2 + \sqrt{3}); \\ Y_1 = \frac{a}{4} \end{cases} \quad ; \quad P_1 \begin{cases} X_2 = \frac{a}{4}(2 - \sqrt{3}) \\ Y_2 = \frac{a}{4} \end{cases}$$

und dieselben genügen der Gleichung $S = 0$.

Dieselbe Uebereinstimmung findet für $l = 2$ statt.

$$C,\ x_1 = a;\ y_1 = \frac{a}{2}$$

Es ist $K \equiv x^2 + y^2 - ax = 0$ und die Gerade $A \equiv y - \frac{a}{2} = 0$ berührt diesen Kegelschnitt, es ist also $x_2 = x_3 = \frac{a}{2}$ und der Punkt P bringt jetzt eine Berührung der Kegelschnitte $S = 0$

hervor, muss also nach obigem Satz auf dem Kegelschnitt $\Pi = 0$ liegen, was auch der Fall ist, wie die Einsetzung seiner Coordinaten in $\Pi = 0$ zeigt. Die Coordinaten

$X_1 = Y_2 = \frac{a}{2}$ und $Y_1 = Y_2 = \frac{a}{2}$ erfüllen die Gleichung $\Pi_1 \equiv 0$

mithin stimmt Alles mit obigem Satz überein.

4, $\lambda = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$

Analog mit dem Vorhergehenden geht die Mittelpunktscurve in eine gleichseitige Hyperbel über

$$M \equiv \xi^2 - \eta^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1 \xi + y_1 \eta = 0$$

und die Bedingung für die Realität der Punkte P_1 und P_2 ergibt sich als:

$$\frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} - 1 \leqq 0$$

demnach erleidet der vorige Satz nur die Modification, dass die Mittelpunktscurve eine gleichseitige Hyperbel für $\lambda = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$ und die Punkte P_1 und P_2 reell sind, wenn der Punkt P innerhalb oder auf einer Hyperbel liegt, welche in allen Stücken der in vorigem Satz angegebenen Ellipse analog ist und die kleine Axe dieser zur Hauptaxe hat.

Die Gleichung dieser Hyperbel ist

$$\Pi \equiv \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} - 1 = 0$$

Liegt Punkt P auf ihr, so beschreibt der Berührungspunkt P_1 den Kegelschnitt $\Pi_1 = 0$, welcher jedoch in diesem Falle imaginär wird, da $\lambda = \frac{b^2}{a^2 + b^2} < +1$.

Was den Kegelschnitt $K = 0$ betrifft, so kann derselbe für diesen Fall nur eine Ellipse nicht einmal ein Kreis sein, wie seine Discriminante zeigt.

II.

Wählen wir statt der Ellipse die Hyperbel

$$C \equiv x^2 - \frac{a^2}{b^2} - a^2 = 0$$

so ist die Gleichung eines doppelt berührenden Kegelschnittes

$$(15) \ldots S \equiv x^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 - \lambda \left[(x - x_1) + l (y - y_1) \right]^2 = 0$$

und es ist für dieselbe, wenn wir sie auf die Form

$$S \equiv K - k A L = 0$$

bringen

$$K \equiv (1 - \lambda) x^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + 2 \lambda x_1 x - a^2 - \lambda x_1^2 = 0$$

während die durch die Gleichungen $A = 0$ und $L = 0$ dargestellten Geraden ganz dieselben bleiben wie bei der Ellipse.

Die Abscissen der Punkte P_1 und P_2 sind jetzt

$$(16) \ldots \left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} y_1^2 + a^2 + \lambda (x_1^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - a^2)}}{1 - \lambda} - \frac{\lambda x_1}{1 - \lambda}$$

und zwar sind diese Punkte reell, wenn

$$(17) \ldots \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + a^2 + \lambda (x_1^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - a^2) \geqq 0$$

aus welcher Bedingung wir erkennen, dass dies stets der Fall, sobald der feste Punkt P auf der gegebenen Hyperbel liegt, indem dann der zweite Teil des obigen Ausdruckes $= 0$ wird, während der erste stets positiv ist. In Uebereinstimmung hiermit lassen sich für die Lage des Punktes P auf der Hyperbel aus $\frac{a^2}{b^2} y_1^2 + a^2 \geqq 0$ keine Grenzlinien aufstellen, wollen wir die Gleichung derselben aus der allgemeinen Gleichung (c) hierfür ableiten, so finden wir sie als $y_1 = \pm \sqrt{-b^2}$ mithin als imaginäre Gerade.

Für eine Berührung sämmtlicher Kegelschnitte $S=0$ muss der in Gleichung (17) stehende Ausdruck $\equiv 0$ sein, welcher nach x_1 und y_1 geordnet den in diesem Falle erforderlichen geometrischen Ort des Punktes P als den Kegelschnitt:

$$\Pi \equiv \frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

liefert, während der Berührungspunkt P_1 den Kegelschnitt

$$\Pi_1 \equiv \frac{X^2}{\left(\frac{a\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-1}}\right)^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

beschreibt.

Die beiden Kegelschnitte haben beide gleiches Centrum und gleiche Hauptaxenrichtung ja sogar gleiche Länge der in der Y-Axe liegenden Hauptaxe mit der gegebenen Hyperbel und sind ebenfalls Hyperbeln, wenn (wie bei der Ellipse) λ ausserhalb der Grenzen $+1$ und 0 liegt, während sie für jeden dazwischen liegenden Wert imaginäre Kegelschnitte sind.

Die Mittelpunktscurve der Kegelschnitte $S=0$ finden wir als den Kegelschnitt

$$M \equiv b^2(\lambda-1)\xi^2 - a^2\lambda\eta^2 - b^2 x_1 \lambda \xi + a^2 y_1 \lambda \eta = 0,$$

welcher durch den Mittelpunkt der gegebenen Hyperbel geht, gleiche Hauptaxenrichtung mit ihr hat und die Ordinatenaxe für jeden Wert λ in demselben Punkte ($\eta = y_1$) schneidet. Wie seine Discriminante

$$\Delta = a^2 b^2 \lambda (1-\lambda)$$

zeigt, ist er für negatives λ stets eine Hyperbel, für positives dagegen eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel jenachdem

$$\lambda \gtrless 1$$

Wir betrachten wieder dieselben speciellen Fälle, wie bei der Ellipse

$$1,\ \lambda = \infty$$

gibt der Mittelpunktscurve die Gleichung

$$\frac{\xi^{12}}{a^2\,\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{4a^2b^2}}-\frac{\eta^{12}}{b^2\,\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{4a^2b^2}}-1=0$$

wenn wir sie auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen transformiren, und das Resultat ist dem für die Ellipse gefundenen ganz entsprechend.

$$2,\ \lambda=1$$

liefert genau dasselbe wie bei der Ellipse, wenn wir dort der Grösse b^2 das entgegengesetzte Vorzeichen beilegen, wie man aus Gleichung:

$$M\equiv a^2\eta^2+b^2x_1\xi-a^2y_1\eta=0$$

erkennt.

$$3,\ \lambda=-\frac{b^2}{a^2-b^2}$$

ist auch für die jetzige Betrachtung ein besonders günstiger Wert, da er die Mittelpunktscurve zu einer gleichseitigen Hyperbel

$$\frac{\eta^{12}}{\frac{b^4x_1^2+a^4y_1^2}{4a^4}}-\frac{\xi^{12}}{\frac{b^4x_1^2+a^4y_1^2}{4a^4}}-1=0$$

macht, welche mit der für die Ellipse unter (Nr. 4) sich ergebenden Vieles gemein hat.

Die Realität der beiden Punkte P_1 und P_2 hängt ab von der Bedingung

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1\leqq 0$$

der feste Punkt P muss also innerhalb einer der gegebenen concentrischen Hyperbel liegen, deren reelle Axe $=\frac{a^2}{b}$, deren Nebenaxe mit der der gegebenen Hyperbel zusammenfällt.

Diese Hyperbel stimmt mit dem Kegelschnitt

$$\Pi\equiv\frac{x_1^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0$$

überein, wird sie vom dem Punkt P durchlaufen, so beschreibt der gemeinsame Berührungspunkt P_1 der Kegelschnitte $S=0$; den Kegelschnitt

$$\Pi_1 \equiv \frac{X^2}{b^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

also eine gleichseitige Hyperbel, welche mit der gegebenen concentrisch ist, deren reelle Axe in der X-Axe liegt und $=b$ ist.

Wählen wir wieder das Verhältnis der Halbaxen der gegebenen Hyperbel so, dass $a=b\sqrt{2}$, so wird $\lambda=-1$, wofür auch der durch $K=0$ dargestellte Kegelschnitt in eine gleichseitige Hyperbel übergeht.

$$4,\ \lambda = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Die Curve $M=0$ wird ein Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1 \xi - y_1 \eta = 0$$

dem 4. Fall für die Ellipse entsprechend kann hierbei der Kegelschnitt $K=0$ nur eine ungleichseitige Hyperbel sein, wie die Gleichung

$$K \equiv a^2 b^2 x^2 - a^2 (a^2+b^2) y^2 + 2 b^4 x_1 x - b^4 x_1^2 - a^2 b^2 (a^2+b^2) = 0$$

zeigt.

III.

Ist der Kegelschnitt in der allgemeinen Scheitelgleichung gegeben

$$C \equiv A x^2 + C y^2 + p x = 0$$

$$\text{wobei } p = 2\sqrt{\frac{A E^2}{C} - A F + D}$$

im Vergleich zu der oben betrachteten allgemeinen Gleichung, so nimmt die hierauf bezügliche Gleichung eines doppelt berührenden Kegelschnittes die Form

$$S \equiv A x^2 + C y^2 + p x - \lambda \left[x - x_1 + l (y - y_1) \right]^2 = 0$$

an, welche sich wieder in

$$S \equiv K - k A L = 0$$

umgestalten lässt, wobei die Werte der Grössen A, L und k gegen früher unverändert sind, während hier

$$K \equiv (A - \lambda) x^2 + C y^2 + 2 \left(\frac{p}{2} + \lambda x_1 \right) x - \lambda x_1^2$$

aus welcher Grösse, wenn wir sie $= 0$ setzten in Verbindung mit $A = 0$ die Coordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 sich ergeben

$$\left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pm \sqrt{\lambda (A x_1^2 + C y_1^2 + p x_1) - \left(A C y_1^2 - \frac{p^2}{4} \right)} - \frac{p}{2} + \lambda_1}{A - \lambda}$$

$$\left.\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix}\right\} = y_1.$$

Dieselben sind reell wenn

$$\lambda (A x_1^2 + C y_1^2 + p x) - \left(A C y_1^2 - \frac{p^2}{4} \right) \geqq 0$$

mithin wie früher unabhängig von dem Wert der Grösse λ, sobald der feste Punkt P ein Punkt des gegebenen Kegelschnittes, da hierfür der Coefficient von λ in obiger Bedingungsgleichung $= 0$ wird und dieselbe sich auf

$$- \left(A C y_1^2 - \frac{p^2}{4} \right) \geqq 0$$

reducirt. Hieraus finden wir, dass in diesem Falle

$$y_1^2 \leqq \frac{p^2}{4 A C}$$

sein muss, wenn die Punkte P_1 und P_2 reell sein sollen, mithin ergeben sich die Grenzlinien für die Lage des Punkts P als

$$y = \pm \frac{p}{2 \sqrt{A C}}$$

sie sind also nur dann reell und endlich bestimmt, wenn A

und C gleiches Vorzeichen und beide >0, d. h. wenn der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse ist.

Liegt nun für den Fall der Ellipse der Punkt P_1 in einem Schnittpunkte dieser Grenzlinien mit dem gegebenen Kegelschnitt, so ist

$$\lambda(A x_1^2 + C y_1^2 + p x_1) - \left(A C y_1^2 + \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

mithin müssen sämmtliche Kegelschnitte $S = 0$ sich in dem Punkte P_1 (resp. P_2) berühren.

Sehen wir jedoch von der Lage des Punkts P auf dem gegebenen Kegelschnitte ab, so ist dieselbe, wenn P_1 und P_2 ineinanderfallen (also die Kegelschnitte $S = 0$ eine Berührung untereinander haben) an den Kegelschnitt

$$\Pi \equiv A\lambda x_1^2 + C(\lambda + A) y_1^2 + p\lambda x_1 + \frac{p^2}{4} = 0$$

gebunden, während der Berührungspunkt P_1 dann den Kegelschnitt

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 \equiv A(A-\lambda)^2 X^2 + p(A-\lambda)(1-\lambda) X - C(A+\lambda) Y^2 \\ + \frac{p^2}{4}(1-\lambda) \end{aligned}\right\} = 0$$

beschreibt.

Was die Gestalt des Kegelschnittes $K = 0$ anlangt, so ist dieselbe, wie wir aus seiner Discriminante

$$\delta = (A-\lambda) C$$

erkennen, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem

$$A \gtreqless \lambda$$

Bei Aufsuchung der Mittelpunktscurve $M = 0$ für sämmtliche doppelt berührende Kegelschnitte $S = 0$ müssen wir wieder die Methode der Determinanten zu Hilfe nehmen, doch wird hierbei die resultirende Determinante wesentlich einfacher im Vergleich zu der bei der allgemeinen Gleichung aufgestellten, denn sie entsteht aus den Gleichungen

$$l^2\left(A\xi + \frac{p}{2}\right)\lambda - l C y_1 \lambda - C\left(\frac{p}{2} + \lambda x_1\right) + C(A-\lambda)\xi = 0$$

$$l^2 A\lambda\eta - l\left[A(x_1 + l y_1) - \frac{p}{2}\right]\lambda - C(A-\lambda)\eta = 0$$

und bedarf nur einer einmaligen Umformung um vom zweiten Grad nach ξ und η zu werden.

IV.

Nehmen wir nun den speciellen Fall an, dass der gegebene feste Kegelschnitt eine Ellipse sei und geben ihrer Scheitelgleichung die Form:

$$E \equiv \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - 2\frac{b^2}{a}x = 0$$

so wird die Gleichung eines doppelt berührenden Kegelschnittes

$$S \equiv \left(\frac{b^2}{a^2} - \lambda\right)x^2 + y^2 - 2\left(\frac{b^2}{a} - \lambda x_1\right)x - \lambda x_1^2 \Big\} = 0$$
$$- \lambda l(y - y_1)\left[2(x - x_1) + l(y - y_1)\right] \Big\}$$

wenn wir ihr die Form $S \equiv K - kAL = 0$ geben, wobei

$$K \equiv \left(\frac{b^2}{a^2} - \lambda\right)x^2 + y^2 - 2\left(\frac{b^2}{a} - \lambda x_1\right)x - \lambda x_1^2$$

während A, L und k ihre früheren Werte beibehalten. Die Gleichung $K = 0$ in Verbindung mit $A \equiv y - y_1 = 0$ liefert die Abscissen der beiden Punkte P_1 und P_2

$$\left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{+\sqrt{\lambda\left(\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + y_1^2 - 2\frac{b^2}{a}x_1\right) - \frac{b^2}{a^2}(y_1^2 - b^2)}}{\left(\frac{b^2}{a^2} - \lambda\right)}$$
$$+ \frac{\frac{b^2}{a} - \lambda x_1}{\frac{b^2}{a^2} - \lambda}$$

woraus wir für die Realität dieser Punkte P_1 und P_2 die Bedingung

$$\lambda\left(\frac{b^2}{a^2}x_1^2+y_1^2-2\frac{b^2}{a}x_1\right)-\frac{b^2}{a^2}(y_1^2-b^2)\gtreqless 0$$

finden. Aus diesem Ausdruck lassen sich ganz dieselben Resultate ableiten wie die oben für die Scheitelgleichung der Ellipse gefundenen, dass nämlich für eine jede Lage des Punktes P auf der gegebenen Ellipse die Punkte P_1 und P_2 stets reell sind, da hierfür $y_1 \leqq b$ und dass für $y_1 = b$ diese Punkte ineinanderfallen, mithin die Kegelschnitte $S=0$ sich untereinander berühren. Abgesehen von dieser Beschränkung der Lage des Punktes P findet auch dann immer eine Berührung statt, wenn

$$\lambda\left(\frac{b^2}{a^2}x_1^2+y_1^2-2\frac{b^2}{a}x_1\right)-\frac{b^2}{a^2}(y_1^2-b^2)=0$$

welche Gleichung nach x_1 und y_1 geordnet, den Kegelschnitt

$$\Pi \equiv \lambda\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2\left(\lambda-\frac{b^2}{a^2}\right)-2\lambda\frac{b^2}{a}x+\frac{b^4}{a^2}=0$$

für den geometrischen Ort der zur Berührung erforderlichen Lage von P ergibt. Der Berührungspunkt P_1 befindet sich stets auf dem Kegelschnitt

$$\Pi_1 \equiv \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\lambda\right)X^2-\lambda y^2+2\frac{b^2}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\lambda\right)X$$
$$+\frac{b^4}{a^2}=0$$

Diese beiden Kegelschnitte haben mit der gegebenen Ellipse gleiches Centrum und gleiche Richtung der Hauptaxen, ihre beiderseitige Discriminante ist

$$\Delta=-\lambda\left(\frac{b^2}{a^2}-\lambda\right)\frac{b^2}{a^2}$$

sie sind also für jeden negativen Wert von λ sowie für jeden positiven, sobald derselbe $>\frac{b^2}{a^2}$, stets Ellipsen.

Bei der Aufstellung der Mittelpunktsgleichung sämmtlicher doppelt berührender Kegelschnitte $S=0$, denen ein constanter Wert λ zukommt, stossen wir auf grössere Weitläufigkeiten wie

bei der Mittelpunktsgleichung der Ellipse. Suchen wir die Coordinaten des Centrum's einer dieser Kegelschnitte, so stellen sie sich, wenn wir ihre Gleichungen nach Potenzen von b ordnen in folgenden Gleichungen dar

$$l^2 \lambda b^2 (a - \xi) + l \lambda a^2 y_1 + \xi (b^2 - a^2 \lambda) - a b^2 + a^2 \lambda x_1 = 0$$

$$l^2 \lambda b^2 (y_1 - \eta) + l \lambda b^2 (x_1 - a) + (b^2 - a^2 \lambda) \eta = 0,$$

aus welchen wir nach der Methode der Determinanten die Gleichung der Mittelpunktscurve in der Form

$$M = \begin{vmatrix} \lambda b^2 (a - \xi) & , & 0 & , & \lambda b^2 (y_1 - \eta), & 0 \\ \lambda a^2 y_1 & , & \lambda b^2 (a - \xi) & , & \lambda b^2 (x_1 - a), & \lambda b^2 (y_1 - \eta) \\ \xi (b^2 - a^2 \lambda) - a b^2 + a^2 \lambda x, & & \lambda a^2 y_1 & , & (b^2 - a^2 \lambda) \eta, & \lambda b^2 (x_1 - a) \\ 0 & , & \xi (b^2 - a^2 \lambda) - a b^2 + a^2 \lambda x_1, & & 0 & , (b^2 - a^2 \lambda) \eta \end{vmatrix}$$

erhalten. Dividiren wir hierin die erste Reihe durch $\lambda\ b^2$, die zweite durch λ und addiren dann jedes mit $(b^2 - a^2 \lambda)$ multiplicirte Glied der ersten Reihe zu dem ihm entsprechenden der dritten und jedes mit $(b^2 - a^2 \lambda)$ multiplicirte der zweiten zu dem entsprechenden mit b^2 multiplicirten der vierten Reihe, so erhalten wir

$$M = \begin{vmatrix} a - \xi & , & 0 & , & y_1 - \eta & , & 0 \\ a^2 y_1 & , & b^2 (a - \xi) & , & b^2 (x_1 - a) & , & b^2 (y_1 - \eta) \\ a^2 \lambda (x_1 - a), & & \lambda a^2 y_1 & , & (b^2 - a^2 \lambda) y_1 & , & \lambda b^2 (x_1 - a) \\ a^2 y_1 (b^2 - a^2 \lambda), & & a^2 b^2 \lambda (x_1 - a), & & b^2 (x_1 - a)(b^2 - a^2 \lambda), & & b^2 (b^2 - a^2 \lambda) y_1 \end{vmatrix}$$

Verfahren wir nochmals in derselben Weise, in dem wir die vierte Vertical-Colonne durch b^2 dividiren und dann ihre mit a^2 multiplicirten Glieder von denen der ersten Colonne, und ebenso die der zweiten mit $(b^2 - a^2)$ multiplicirt von den mit $a^2 \lambda$ multiplicirten der dritten Colonne subtrahiren, so bekommt die Determinante die Form:

$$M = \begin{vmatrix} a - \xi, & 0 & , & \lambda a^2 (y_1 - \eta) & , & 0 \\ a^2 \eta, & b^2 (a - \xi) & , & a^2 b^2 \lambda (x_1 - \xi) - b^4 (a - \xi), & & y_1 - \eta \\ 0 & , \lambda a^2 y_1 & , & 0 & , & \lambda (x_1 - a) \\ 0 & , a^2 b^2 \lambda (x_1 - a), & & 0 & , & (b^2 - a^2 \lambda) y_1 \end{vmatrix}$$

Wird nun die zweite Colonne mit der dritten vertauscht, so erkennt man, dass diese Determinante gleich dem Produkt

$$\begin{vmatrix} \lambda a^2 y_1 & , & \lambda(x_1 - a) \\ a^2 b^2 \lambda (x_1 - a), & & (b^2 - a^2 \lambda) y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a - \xi, & \lambda a^2 (y_1 - \eta) \\ a^2 \eta \ , & a^2 b^2 \lambda (x_1 - \xi) - b^4 (a - \xi) \end{vmatrix}$$

ist, mithin muss der zweite Factor dieses Produktes die Gleichung der Mittelpunktscurve repräsentiren, da der Wert dieses Produktes $= 0$ und sein erster Factor constant und von Null verschieden ist, demnach stellt

$$M \equiv \begin{vmatrix} a - \xi, & \lambda a^2 (y_1 - \eta) \\ a^2 \eta \ , & a^2 b^2 \lambda (x_1 - \xi) - b^4 (a - \xi) \end{vmatrix} = 0$$

oder aufgelöst:

$$M \equiv \left\{ \begin{matrix} \xi^2 b^2 (a^2 \lambda - b^2) + a^4 \lambda \eta^2 + a b^2 (2 b^2 - a^2 \lambda - a \lambda x_1) \xi \\ - a^4 \lambda y_1 \eta + a^2 b^2 (a \lambda x_1 - b^2) \end{matrix} \right\} = 0$$

die Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte der Kegelschnitt $S = 0$ dar.

Im Vergleich zu dem für diesen Ort oben gefundenen Kegelschnitt, wobei die Gleichung der gegebenen Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen gegeben war, finden wir leicht die Uebereinstimmungen, dass beidesmal diese Curve durch den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse ($\xi = a$, $\eta = 0$) geht und für jeden Wert von λ die im Abstand $+ a$ zur jetzigen Y-Axe gezogene Parallele (also die frühere Y-Axe) stets in demselben Punkte ($\xi = a$, $\eta = y_1$) schneidet.

Eine Verschiedenheit dagegen ergibt sich scheinbar für die Discriminante des Kegelschnittes $M = 0$.

$$\Delta = b^2 (a^2 \lambda - b^2) a^4 \lambda = - \lambda (b^2 - a^2 \lambda) a^4 b^2$$

so dass wie oben für negatives λ dieser Kegelschnitt stets eine Ellipse ist, für positives dagegen eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel je nachdem

$$\lambda \gtreqless \frac{b^2}{a^2}$$

während doch früher hierfür die Bedingung $\lambda \gtreqless 1$ sich ergab. Ganz ähnlich verhält es sich mit den Mittelpunktscoordinaten dieses Kegelschnittes, dieselben sind nämlich, wenn wir vorher auf den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse ($x = a$, $y = 0$) transformiren:

$$\xi_0 = \frac{x_1 \lambda}{2\left(\lambda - \frac{b^2}{a^2}\right)}; \quad \eta_0 = \frac{y_1}{2}$$

während die früheren Werte derselben

$$\xi_0 = \frac{x_1 \lambda}{2(\lambda - 1)}; \quad \eta_0 = \frac{y_1}{2} \text{ waren,}$$

trotzdem dieselben auf ein und dasselbe Coordinaten-System bezogen sind. Noch in vielen anderen Fällen tritt uns bei der jetzigen Untersuchung die Grösse $\frac{b^2}{a^2}$ entgegen an solchen Stellen, an denen man in Vergleich zu den früheren Resultaten den Wert 1 erwarten müsste. Diese scheinbare Verschiedenheit fällt jedoch hinweg, wenn wir beachten, dass den früheren Untersuchungen die gegebene Ellipse in der Form

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 - a^2 = 0$$

zu Grunde gelegt war, während, wenn wir die jetzt behandelte Gleichung

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 - 2 \frac{b^2}{a} x = 0$$

auf ihren Mittelpunkt transformiren, die Form

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

zum Vorschein kommt. Um also noch nachträglich eine Uebereinstimmung beider Gleichungen herbeizuführen müssten wir $\frac{b^2}{a^2} = 1$ oder $b^2 = a^2$ setzen, wodurch die eben angeführten Verschiedenheiten wegfallen würden.

Eine nähere Untersuchung der einzelnen Fälle für verschiedene Werte von λ glauben wir unterlassen zu können, da aus den angeführten Vergleichen die völlige Uebereinstimmung dieses Kegelschnittes $M=0$ mit dem ihm entsprechenden früheren hervorgeht. Ebenso ist eine nochmalige Wiederholung dieser Rechnungen in Bezug auf die Hyperbel überflüssig, da wir dadurch zu ganz ähnlichen Resultaten gelangen.

V.

Es bleibt noch die Betrachtung der Parabel übrig, deren Gleichung

$$C \equiv y^2 - px,$$

aus welcher die eines doppelt berührenden Kegelschnittes als

$$S \equiv y^2 - px - \lambda\left[x - x_1 + l(y - y_1)\right]^2 = 0$$

oder mit Einführung der Bezeichnungen A, L, K, k

$$S \equiv K - kAL = 0$$

hervorgeht, wobei in Vergleich zu der früheren Bedeutung dieser Grössen nur K seinen Wert ändert

$$K \equiv -\lambda x^2 + y^2 + 2\left(\lambda x_1 - \frac{p}{2}\right)x - \lambda x_1^2$$

Für die Abscissen der beiden Punkte P_1 und P_2 finden wir wieder aus $K=0$ und $A=0$

$$\left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{+}{-}\frac{\sqrt{\lambda(y_1^2 - px)4 + p^2}}{2\lambda} + \frac{2\lambda x_1 - p}{2\lambda}$$

dieselben sind reell, wenn

$$\lambda(y_1^2 - px_1)4 + p^2 \geqq 0,$$

sie sind also reell für positives λ, wenn der feste Punkt P eine negative Abscisse hat, da in diesem Falle jedes einzelne Glied des obigen Ausdruckes positiv ist. Liegt dieser Punkt dagegen auf der gegebenen Parabel, so verschwindet der Coefficient von λ und die Punkte P_1 und P_2 sind ebenfalls

stets reell, da hierzu nur die stets erfüllte Bedingung $p^2 \geqq 0$ erforderlich ist.

Die Punkte P_1 und P_2 fallen zusammen, wenn

$$\lambda(y_1^2 - p x_1) 4 + p^2 = 0$$

mithin der feste Punkt P auf einer Parabel

$$\Pi \equiv \lambda y_1^2 - \lambda p x_1 + \frac{p^2}{4} = 0$$

liegt, diese Parabel hat, auf ihren Scheitel

$$(u = \frac{p}{4\lambda};\ v = 0)$$

transformirt die Gleichung

$$y^2 - p x = 0$$

ist also der gegebenen ähnlich. Setzten wir den aus dem für diesen Fall übrig bleibenden Wert der Abscisse des Punktes P_1

$$X_1 = \frac{2\lambda x_1 - p}{2\lambda}$$

hervorgehenden Wert x_1 in diese Gleichung $\Pi_1 = 0$ ein, so erhalten wir den geometrischen Ort des Berührungspunktes P_1

$$\Pi_1 \equiv \lambda Y^2 - \lambda p X - \frac{p^2}{4} = 0$$

also wieder eine Parabel, deren Scheitelgleichung

$$\Pi_1 \equiv Y^2 - p X = 0$$

ist, während ihre Scheitelcoordinaten

$$u = -\frac{p}{4\lambda};\ v = 0$$

dieselbe ist demnach ebenfalls der gegebenen ähnlich und ihr Scheitel liegt eben so weit von dem Scheitel der gegebenen nach der negativen Richtung hin wie der Scheitel von $\Pi = 0$ nach der positiven Richtung, alle drei liegen in der X-Axe selbst.

Bei Zusammenfassung dieser Resultate ergibt sich folgender Satz:

»Beschreibt der feste Punkt P eine der gegebenen ähnliche und in gleicher Richtung gelegene Parabel, deren Scheitel in

der X-Axe liegt, so berühren sämmtliche die gegebene Parabel doppelt berührenden Kegelschnitte, für welche λ constant ist, sich in einem Punkte. Dieser Punkt liegt ebenfalls auf einer der gegebenen ähnlichen und gleichgerichteten Parabel, deren Scheitel sich in der X-Axe befindet und zwar in Vergleich mit dem der ersten Parabel in gleicher aber entgegengesetzt gerichteter Entfernung vom Scheitel der gegebenen Parabel.«

Der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte $S=0$ gestaltet sich sehr einfach, wir finden als seine Gleichung

$$2\lambda\eta^2 - p\lambda\xi - 2\lambda y_1\eta + p\lambda x_1 - \frac{p^2}{2} = 0$$

mithin ist er wieder eine Parabel, welche auf ihren Scheitel transformirt die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{p}{2}\xi$$

erhält, sie hat demnach für jeden Wert von λ stets denselben Parameter $\frac{p}{2}$ und die Richtung der gegebenen. Bei Annahme der speciellen Werte $\lambda = \frac{p}{2x_1}$; $y_1 = 0$ fällt der Scheitel dieser Mittelpunkts-Parabel mit dem der gegebenen zusammen, während der Kegelschnitt $K=0$ hierfür eine Hyperbel wird, wenn x_1 positiv, eine Ellipse, wenn x_1 negativ.